А.В.С т о л я р о в

ДВОЙСТВЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ ($n-1$)-ТКАНЕЙ НА РАСПРЕДЕЛЕНИИ ГИПЕРПЛОСКОСТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Двойственная проективная теория двумерных сетей (как плоских, так и заданных на поверхностях $V_2 \subset P_3$) методами тензорного анализа разработана в работах А.И.Чахтаури [10], [11]. В последнее десятилетие применение метода внешних форм Э.Картана и метода продолжений и охватов Г.Ф.Лаптева [3] позволило разработать основы двойственной проективной теории многомерных сетей на различных многообразиях, а именно, плоских многомерных сетей (см.[6]), сетей на регулярных гиперповерхностях $V_{n-1} \subset P_n$ (см.[5]) и на регулярных гиперполосах $H_m \subset P_n$ (см.[7]).

Ниже для ($n-1$)-ткани, заданной на регулярном распределении $\mathfrak{M}$ гиперплоскостных элементов пространства проективной связности $P_{n,n}$, укажем пути построения основ ее двойственной теории; полученные результаты справедливы и для сети , заданной на регулярной гиперповерхности $V_{n-1} \subset P_{n,n}$.

На протяжении всего изложения индексы принимают следующие значения:

$$\bar{\mathcal{J}}, \bar{\mathcal{K}}, \bar{L} = \overline{0,n}\,;\ \mathcal{J}, \mathcal{K}, L, P, Q = \overline{1,n}\,;\ i,j,k,\ell,s,t = \overline{1,n-1}\,.$$

I. Рассмотрим пространство проективной связности $P_{n,n}$ с n-мерной базой и n -мерными центропроективными слоями P_n , определяемое [2],[I2] системой ($n+1$ $)^2$ форм Пфаффа $\omega_{\bar{\mathcal{J}}}^{\bar{\mathcal{K}}}$, удовлетворяющих структурным уравнениям

$$\mathcal{D}\omega_{\bar{\mathcal{J}}}^{\bar{\mathcal{K}}} = \omega_{\bar{\mathcal{J}}}^{\bar{L}} \wedge \omega_{\bar{L}}^{\bar{\mathcal{K}}} + \frac{1}{2} R_{\bar{\mathcal{J}}PQ}^{\bar{\mathcal{K}}}\, \omega_0^P \wedge \omega_0^Q\,,\quad \omega_{\bar{L}}^{\bar{L}} = 0;$$

здесь величины $R_{\bar{\mathcal{J}}PQ}^{\bar{\mathcal{K}}}$ кососимметричны по индексам P, Q и в совокупности образуют тензор кривизны-кручения пространства $P_{n,n}$. Заметим, что в случае $R_{\bar{\mathcal{J}}PQ}^{\bar{\mathcal{K}}} \equiv 0$ пространство $P_{n,n}$ представляет собой n-мерное проективное пространство P_n .

Рассмотрим распределение $\mathfrak{M} \subset P_{n,n}$ ($n>2$) гиперплоскостных элементов [4]; относительно репера 0-го порядка дифференциальные уравнения $\mathfrak{M} \subset P_{n,n}$ имеют вид:

$$\omega_i^n = \Lambda_{i\mathcal{K}}^n\, \omega_0^{\mathcal{K}}. \tag{1}$$

Показано [8], что регулярное (то есть тензор Λ_{ij}^n невырожден) распределение $\mathfrak{M} \subset P_{n,n}$ во второй дифференциальной окрестности индуцирует пространство проективной связности $\bar{P}_{n,n}$, двойственное исходному относительно инволютивного преобразования $\mathcal{J} : \omega_{\bar{\mathcal{J}}}^{\bar{\mathcal{K}}} \rightarrow \bar{\omega}_{\bar{\mathcal{J}}}^{\bar{\mathcal{K}}}$ форм связности этих пространств; дифференциальные уравнения геометрического образа $\bar{\mathfrak{M}} \subset \bar{P}_{n,n}$, двойственного данному распределению $\mathfrak{M} \subset P_{n,n}$, имеют вид $\bar{\omega}_i^n = \bar{\Lambda}_{i\mathcal{K}}^n\, \omega_0^{\mathcal{K}}$. В соответствии с этим, согласно [9], при нормализации распределения $\mathfrak{M} \subset P_{n,n}$ индуцируются два двойственных пространства $\overset{1}{A}_{n,n-1}$ и $\overset{2}{A}_{n,n-1}$ с линейной связностью аффинного типа.

2. Пусть на распределении $\mathfrak{M} \subset P_{n,n}$ задано $n-1$ линейно независимых гладких полей направлений $A_0 B_i$, где $B_i = a_i^j A_j$, $|a_i^j| \neq 0$; линии, огибающие эти направления, принадлежат распределению $\mathfrak{M}$ и образуют на нем ($n-1$)-ткань Σ .

В репере, отнесенном к ткани Σ , уравнения

$$\omega_i^j = a_{i\mathcal{K}}^j\, \omega_0^{\mathcal{K}},\quad i \neq j \tag{2}$$

вместе с (1) являются ее дифференциальными уравнениями;

... пред-
ставляют собой уравнения „тангенциальной ($n-1$)-ткани" $\bar{\Sigma} \subset \bar{\mathfrak{M}}$, двойственной исходной $\Sigma \subset \mathfrak{M}$.

Нами доказано, что поля $n-1$ квазитензоров q_n^i:

$$q_n^i = \bar{\Lambda}_s^i b_n^s, \quad \tilde{\Lambda}_k^s \Lambda_s^j = \tilde{\Lambda}_s^j \Lambda_k^s = \delta_k^j, \quad \Lambda_k^j = (n-1)\delta_k^j - \Lambda_{jk}^n \Lambda_n^{jj},$$

$$b_n^j = \sum_s \sum_{t \neq j} (a_{ts}^j - \delta_s^j \Lambda_{tn}^n) \Lambda_n^{st} \tag{3}$$

в первой дифференциальной окрестности элемента распределения и ткани $\Sigma \subset \mathfrak{M}$ определяют поле инвариантных нормалей первого рода распределения $\mathfrak{M} \subset P_{n,n}$.

З а м е ч а н и е 1. В случае ткани $\Sigma \subset \mathfrak{M}$ сопряженных линий ($\Lambda_{ij}^n = 0$, $i \neq j$) в охватах нормали q_n^i (см. (3)) участвуют лишь компоненты подобъекта $\{a_{ik}^j, \Lambda_{ik}^n\}$; следовательно, в этом случае поле нормалей q_n^i имеет место и на гиперповерхности $V_{n-1} \subset P_{n,n}$ и представляет собой поле гармонических прямых сети [5]:

$$q_n^i = \frac{1}{n-2} \sum_{k \neq i} a_{kk}^i \Lambda_n^{kk}.$$

В случае несопряженной ткани построение нормали q_n^i проходит лишь на распределении $\mathfrak{M}$.

З а м е ч а н и е 2. Как отмечено в работе [4], на регулярном распределении гиперплоскостных элементов объекты нормалей ν_n^i, ν_i^o внутренним образом определяются (без задания ткани $\Sigma \subset \mathfrak{M}$) лишь во второй дифференциальной окрестности.

Зная закон (3) охвата нормали первого рода q_n^i распределения $\mathfrak{M} \subset P_{n,n}$, можно строить охват квазитензора $\bar{q}_n^i$ двойственного образа $\bar{\mathfrak{M}} \subset \bar{P}_{n,n}$, по виду аналогичный охвату (3), после чего по закону $\bar{q}_n^i = -\Lambda_n^{ik} q_k$ (см. [8]) легко найти соответствующую нормаль второго рода q_i^o. Например,

... находим:

$$q_i^o = \Lambda_{il}^n [q_n^l + \sum_{k,t,s} \tilde{\Lambda}_t^l \Lambda_n^{ts} (b_s - \Lambda_n^{kt} \Lambda_{tsk}^n),$$

$$b_i = \Lambda_n^{ts} \Lambda_{its}^n$$

В случае сопряженной ткани $\Sigma \subset \mathfrak{M}$ поле нормалей q_i^o относится к первой дифференциальной окрестности элемента распределения $\mathfrak{M} \subset P_{n,n}$ и совпадает с полем гармонических плоскостей ткани в смысле [1]; при этом поля гармонических прямых q_n^i и гиперпрямых q_i^o нормализуют распределение $\mathfrak{M} \subset P_{n,n}$ взаимно (относительно поля соприкасающихся гиперквадрик Q_{n-1}, см. [8]) тогда и только тогда, когда линии ткани $\Sigma \subset \mathfrak{M}$ являются линиями Дарбу.

Условие параллельного перенесения направления касательной к i-й линии ткани $\Sigma \subset \mathfrak{M}$ вдоль ее линии ω_o^l в аффинной связности пространства $\overset{1}{A}_{n,n-1}$ или $\overset{2}{A}_{n,n-1}$, индуцируемого нормализацией (ν_n^i, ν_i^o) распределения $\mathfrak{M} \subset P_{n,n}$, имеет, соответственно, вид:

$$a_{il}^j - \nu_n^j \Lambda_{il}^n + \nu^o \delta_l^j = 0, \quad i \neq j,$$

$$\Lambda_n^{js} \Lambda_{sil}^n + a_{il}^j - \Lambda_n^{js} \nu_s^o \Lambda_{li}^n + \delta_l^j \Lambda_{si}^n \nu_n^s = 0, \quad i \neq j.$$

Отсюда вытекают следующие предложения:

1) сопряженная ткань на регулярном распределении гиперплоскостных элементов $\mathfrak{M} \subset P_{n,n}$ является тканью с совпавшими псевдофокусами F_i^j (с совпавшими псевдофокальными гиперплоскостями η_i^j) тогда и только тогда, когда относительно поля гармонических гиперпрямых q_i^o (гармонических прямых q_n^i) данная ткань является геодезической второго (первого) рода.

2) ($n-1$)-ткань гиперсопряженной системы $\mathfrak{M} \subset P_n$ — чебышевская первого (второго) рода относительно некоторой нор-

мализации распределения тогда и только тогда, когда она является геодезической второго (первого) рода; при этом полем нормалей второго (первого) рода служит поле гармонических гиперпрямых q_i^0 (гармонических прямых q_n^i) ткани.

Отметим, что гиперсопряженные системы $\mathcal{M} \subset P_n$, несущие чебышевскую ткань первого (второго) рода, существуют:

а) при $n > 3$ с произволом в $n(n-1)$ функций двух аргументов;

б) при $n = 3$ с произволом в две функции трех аргументов.

Список литературы

1. Б а з ы л е в В.Т. О сетях на многомерных поверхностях проективного пространства.-Изв. вузов. Матем., 1966, № 2, с. 9-19.

2. К а р т а н Э. Пространства аффинной, проективной и конформной связности.- Изд-во Казанск. ун-та, 1962.

3. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.-Тр. Моск. матем.общ-ва, 1953, т.2, с.275-382.

4. О с т и а н у Н.М. Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве. -Тр. геометр. семинара. ВИНИТИ, 1973, 4, с.71-120.

5. С т о л я р о в А.В. О двойственной геометрии сетей и полярно сопряженных конфигурациях на гиперповерхности. -Изв. вузов. Матем., 1972, № 4, с.109-119.

6. С т о л я р о в А.В. О двойственной геометрии плоских многомерных сетей. -Изв. вузов. Матем., 1973, № 7, с.92-102.

7. С т о л я р о в А.В. О двойственной геометрии сетей на регулярной гиперполосе. -Изв. вузов. Матем., 1977, № 8, с.68-78.

8. С т о л я р о в А.В. Двойственная теория регулярного распределения гиперплоскостных элементов в пространстве проективной связности. 1. -Изв. вузов. Матем., 1980, № 1, с.79-82.

9. С т о л я р о в А.В. Двойственная теория регулярного распределения гиперплоскостных элементов в пространстве проективной связности. 2. - Изв. вузов. Матем., 1980, № 2, с.84-87.

10. Ч а х т а у р и А.И. Внутренние геометрии плоских сетей. -Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрССР, 1947, т.15, с.101-148.

11. Ч а х т а у р и А.И. Приложения внутренних геометрий плоских сетей в теорию поверхностей.-Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрССР, 1954, т.20, с.89-130.

12. Cartan E. Leçons sur la théorie des espaces á connexion projective. Paris 1937.